

圏論的位相の基礎理論からCHausにおける位相の一致、およびその圏論的抽象化まで

本稿は、これまでの議論で展開された数学的情報を一切簡略化・要約することなくすべて統合した完全版のドキュメントである。概念の自己完結性を保証するため、すべての証明は論理的ギャップを排除し、適切な段落分けの下で完全に書き下されている。特に第4部においては、空間がコンパクトHausdorffになることの証明やウルトラフィルターの極限の存在証明を厳密に構築し、第5部の代数的性質へと直接接続する構成をとっている。

第1部: 基本概念の厳密な定義

圏論における各種の位相と対象の性質について、複数の条件が絡むものを一つ一つ分解して厳密に定義する。

定義 1.1: ふるい (sieve)

圏 $\mathcal{C}$ における対象 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ 上のふるい (sieve) とは、 X を余域 (codomain) とする射の集合であって、右からの射の合成について閉じているものをいう。

すなわち、 $f \in S$ であり、かつ $\text{codom}(g) = \text{dom}(f)$ を満たす圏 $\mathcal{C}$ の任意の射 g に対して、合成射 $f \circ g \in S$ が常に成り立つことである。

例 1.2: 族によって生成されるふるい

ある対象 X に向かう任意の射の族 $\{f_i : X_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ が与えられたとき、これらと他の任意の射を合成して得られるすべての射の集合 $S = \{f_i \circ g \mid i \in I, \text{codom}(g) = X_i\}$ は、 X 上のふるいとなる。これを「与えられた族によって生成されるふるい」と呼び、 $\langle \{f_i\} \rangle$ と表記することがある。

定義 1.3: Grothendieck位相 (Grothendieck topology)

圏 $\mathcal{C}$ 上のGrothendieck位相 (Grothendieck topology) J とは、各対象 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ に対して、 X 上の特定のふるいの集合 $J(X)$ (この元を「被覆ふるい」と呼ぶ) を割り当てる写像であり、以下の3つの公理をすべて満たすものをいう。

- 極大性 (maximality):** 対象 X 上のすべての射を含む最大のふるい t_X は、必ず $J(X)$ に属する。
- 安定性 (stability under base change):** $S \in J(X)$ とし、 $h : Y \rightarrow X$ を圏 $\mathcal{C}$ の任意の射とする。このとき、 S の h による引き戻しふるい $h^*S = \{g \in \text{Mor}(\mathcal{C}) \mid \text{codom}(g) = Y, h \circ g \in S\}$ は、必ず $J(Y)$ に属する。

- **推移性 / 局所性 (transitivity / local character):** $S \in J(X)$ とし、 R を X 上の任意のふるいとする。もし S に属するすべての射 $h \in S$ に対して、 $h^*R \in J(\text{dom}(h))$ が成り立つならば、 $R \in J(X)$ となる。

定義 1.4: 適合族 (Matching family) と層 (Sheaf)

圏 $\mathcal{C}$ 上の対象 X と、その上のふるい S を考える。 $\mathcal{C}$ から集合の圏 $\mathbf{Set}$ への反変関手 $F: \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ に対し、 S 上の**適合族 (matching family)** とは、各 $f \in S$ ($f: U \rightarrow X$) に対して元 $s_f \in F(U)$ が与えられており、かつ S 内の任意の合成 $f \circ g$ ($g: V \rightarrow U$) に対して $F(g)(s_f) = s_{f \circ g}$ が成り立つような元の族 $(s_f)_{f \in S}$ のことをいう。

また、任意の S 上の適合族 $(s_f)_{f \in S}$ に対して、ある一意な大域的元 $s \in F(X)$ が存在して、すべての $f \in S$ について $F(f)(s) = s_f$ となるとき、関手 F はふるい S に関して**層 (sheaf)** の条件を満たすという。

定義 1.5: 劣カノニカル位相とカノニカル位相

- **劣カノニカル位相 (subcanonical topology):** 圏 $\mathcal{C}$ 上の位相 J に関して、任意の対象 $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が定める表現可能前層 $h_Y = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Y)$ が、すべて J に関する層として振る舞うとき、 J を劣カノニカル位相と呼ぶ。
- **カノニカル位相 (canonical topology):** 圏 $\mathcal{C}$ 上のすべての劣カノニカル位相を包含する最大の Grothendieck 位相のことを指し、 J_{can} と表記する。

定義 1.6: 有効エピふるいと 普遍的有効エピふるい

- **有効エピふるい (effective epimorphic sieve):** 対象 X 上のふるい S が有効エピふるいであるとは、 X が図式 S (すなわち S に含まれるすべての射と、それらの間の可換な射からなる図式) の余極限 (colimit) として自然に同型になることをいう。すなわち $X \cong \text{colim}_{f \in S} \text{dom}(f)$ である。
- **普遍的有効エピふるい (universally effective epimorphic sieve):** 対象 X 上のふるい S が普遍的有効エピふるいであるとは、 S が有効エピふるいであり、かつ任意の射 $g: Y \rightarrow X$ による引き戻しふるい g^*S もまた Y 上の有効エピふるいになることをいう。

定義 1.7: 適合族 (Matching family) と層 (Sheaf)

圏 $\mathcal{C}$ 上の対象 X と、その上のふるい S を考える。 $\mathcal{C}$ から集合の圏 $\mathbf{Set}$ への反変関手 $F: \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ に対し、 S 上の**適合族 (matching family)** とは、各 $f \in S$ ($f: U \rightarrow X$) に対して元 $s_f \in F(U)$ が与えられており、かつ S 内の任意の合成 $f \circ g$ ($g: V \rightarrow U$) に対して $F(g)(s_f) = s_{f \circ g}$ が成り立つような元の族 $(s_f)_{f \in S}$ のことをいう。

また、任意の S 上の適合族 $(s_f)_{f \in S}$ に対して、ある一意な大域的元 $s \in F(X)$ が存在して、すべての $f \in S$ について $F(f)(s) = s_f$ となるとき、関手 F はふるい S に関して**層 (sheaf)** の条件を満たすという。

第2部: カノニカル位相の被覆ふるいと普遍的有効エピふるいの完全な一致

単なる「層条件を満たすこと」から、「有効エピふるい全体がGrothendieck位相になるための引き戻しの安定性」へと至る論理を完全に接続し、カノニカル位相が普遍的有効エピふるいと一致することを証明する。

補題 2.1: 表現可能前層の層条件と有効エピふるいの同値性

証明:

第1段 (極限と適合族の対応):

$\mathcal{C}$ から **Set** への反変表現可能関手 $h_Z = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Z)$ を考える。関手 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Z)$ は、圏 $\mathcal{C}$ における余極限を、集合の圏 **Set** における極限 (limit) に変換する普遍的な性質を持つ。したがって、図式 S に対応する極限 $\lim_{f \in S} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{dom}(f), Z)$ を考えることができる。極限の定義より、この極限の元は、各 $f \in S$ に対して射 $s_f: \text{dom}(f) \rightarrow Z$ を割り当てる族であり、かつ任意の $g: V \rightarrow \text{dom}(f)$ に対して $s_f \circ g = s_{f \circ g}$ を満たすものである。これは定義1.7で述べた h_Z に対する S 上の適合族そのものである。

第2段 (有効エピふるいから層条件の導出):

S が有効エピふるいであると仮定する。定義より $X \cong \text{colim}_{f \in S} \text{dom}(f)$ である。前述の極限への変換性質により、自然な同型 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \cong \lim_{f \in S} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{dom}(f), Z)$ が成立する。この同型の左辺の元 $s: X \rightarrow Z$ は大域的元であり、右辺は適合族である。この同型写像は $s \mapsto (s \circ f)_{f \in S}$ で与えられるため、同型であることは「任意の適合族に対して、それを誘導する大域的元 s が一意に存在する」ことを意味する。ゆえに h_Z は S に関して層である。

第3段 (層条件から有効エピふるいの導出):

逆に、任意の対象 Z について h_Z が S に関して層であると仮定する。このとき、任意の Z に対して $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \cong \lim_{f \in S} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\text{dom}(f), Z)$ が成立する。余極限の普遍性（米田の補題による定式化）によれば、任意の対象 Z に対して上記の自然同型を満たす対象 X は、図式 S の余極限と一致しなければならない。ゆえに $X \cong \text{colim}_{f \in S} \text{dom}(f)$ であり、 S は有効エピふるいである。

証明終

定理 2.2: カノニカル位相のふるいは普遍的有効エピふるいと一致する

圏 $\mathcal{C}$ において、カノニカル位相 J_{can} の被覆ふるいは、普遍的有効エピふるいの全体と正確に一致する。さらに、圏 $\mathcal{C}$ において「任意の有効エピふるいが引き戻しについて安定である」という条件が満たされる場合に限り、カノニカル位相は単なる有効エピふるいの全体と一致する。

証明:

まず、カノニカル位相のふるいが普遍的有効エピふるいであることを示す。

$S \in J_{\text{can}}(X)$ とする。Grothendieck位相の安定性の公理より、任意の射 $g: Y \rightarrow X$ に対して引き戻しふるい g^*S もまた $J_{\text{can}}(Y)$ に属する。カノニカル位相は最大の劣カノニカル位相であるため、 g^*S はすべての表現可能前層について層条件を満たす。補題2.1により、これは g^*S が Y 上の有効エピふるいであることを意味する。任意の g についてこれが成り立つため、定義より S は普遍的有効エピふるいである。

次に、普遍的有効エピふるいの全体がカノニカル位相をなすことを示す。

対象 X 上の普遍的有効エピふるいの全体を $E_{univ}(X)$ とする。 E_{univ} がGrothendieck位相の3つの公理を満たすことを確認する。

- 極大性:** 最大のふるい t_X は恒等射を含み、自明に有効エピふるいである。任意の引き戻し g^*t_X は t_Y となるため、 $t_X \in E_{univ}(X)$ である。
- 安定性:** $S \in E_{univ}(X)$ とし、 $g: Y \rightarrow X$ をとる。任意の射 $h: Z \rightarrow Y$ に対して、 $h^*(g^*S) = (g \circ h)^*S$ である。 S は普遍的であるため $(g \circ h)^*S$ は有効エピふるいである。したがって g^*S 自身も普遍的有効エピふるいであり、 E_{univ} は引き戻しで安定である。
- 推移性:** $S \in E_{univ}(X)$ であり、任意の $f \in S$ について $f^*R \in E_{univ}(\text{dom}(f))$ となるふるい R を考える。 f^*R が有効エピふるいであるため $\text{dom}(f) \cong \text{colim}_{g \in f^*R} \text{dom}(g)$ となる。これを S が有効エピふるいであることによる余極限 $X \cong \text{colim}_{f \in S} \text{dom}(f)$ に代入すると、余極限の結合性により X は R の余極限と同型になる。この性質は任意の引き戻し後も維持されるため、 R もまた普遍的有効エピふるいとなり、 $R \in E_{univ}(X)$ である。

以上により E_{univ} はGrothendieck位相である。また、補題2.1より E_{univ} に属するふるいは表現可能前層を層にするため、 E_{univ} は劣カノニカル位相である。カノニカル位相 J_{can} は最大の劣カノニカル位相であるから $E_{univ} \subset J_{can}$ である。前半で $J_{can} \subset E_{univ}$ を示しているため、 $J_{can} = E_{univ}$ が成立する。

証明終

第3部: コヒーレント位相の基本的性質

定理 3.1: J_{coh} は Grothendieck位相である

証明:

- 極大性:** 最大のふるい t_X は恒等射 $id_X: X \rightarrow X$ を含む。単元族 $\{id_X\}$ から誘導されるコプロダクト射は id_X 自身であり、これは自明に正則エピ射である。ゆえに $t_X \in J_{coh}(X)$ である。
- 安定性:** $S \in J_{coh}(X)$ とし、任意の射 $g: Y \rightarrow X$ をとる。 S はコプロダクト射 $\coprod_{i=1}^n f_i$ が正則エピ射となる有限部分族 $\{f_i\}_{i=1}^n$ を含む。各 f_i と g のファイバー積 $p_i: X_i \times_X Y \rightarrow Y$ をとる。有限余極限の引き戻しは引き戻しの余極限と同型になるため、コプロダクト $\coprod X_i \rightarrow X$ の g に沿った引き戻しは $\coprod p_i$ となる。Barr完全圏において正則エピ射の引き戻しは正則エピ射であるから、 $\coprod p_i$ も正則エピ射である。誘導された有限部分族 $\{p_i\}$ は引き戻しふるい g^*S に含まれるため、 $g^*S \in J_{coh}(Y)$ である。
- 推移性:** $S \in J_{coh}(X)$ であり、 $f \in S \implies f^*R \in J_{coh}(\text{dom}(f))$ となる R を考える。 S は正則エピ射を誘導する有限部分族 $\{f_i\}_{i=1}^n$ を含む。仮定より各 $(f_i)^*R$ も正則エピ射を誘導する有限部分族 $\{g_{ij}\}$ を含む。正則圏において正則エピ射の合成は再び正則エピ射となるため、有限部分族 $\{f_i \circ g_{ij}\}$ も正則エピ射を誘導する。この有限部分族は R に含まれるため、 $R \in J_{coh}(X)$ が成り立つ。

証明終

定理 3.2: J_{coh} は 劣カノニカル位相である

証明:

任意の対象 Z に対し、表現可能前層 $h_Z = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Z)$ が J_{coh} の層になることを示す。Barr完全圏において、任意の正則エピ射 $p: U \rightarrow X$ は自身の核対 $U \times_X U \rightrightarrows U$ の余等化子である。反変関手 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, Z)$ は余極限を極限に変換するた

め、系列 $\text{Hom}(X, Z) \rightarrow \text{Hom}(U, Z) \rightrightarrows \text{Hom}(U \times_X U, Z)$ は集合の圏における等化子となる。被覆ふるい $S \in J_{coh}(X)$ は、コプロダクト射 $p = \coprod f_i: \coprod X_i \rightarrow X$ が正則エピ射となる有限部分族 $\{f_i\}$ を含む。同型 $\text{Hom}(\coprod X_i, Z) \cong \prod \text{Hom}(X_i, Z)$ を等化子図式に適用すると、被覆部分族 $\{f_i\}$ に対する適合条件を満たす元に対して一意な大域的元が存在することが直ちに従う。ゆえに h_Z は層である。

証明終

第4部: CHaus におけるナীবなコンパクト性の破綻と固有の証明

一般の圏論において $J_{can} = J_{coh}$ を導くためには、対象が「任意の結合全射な族が有限の部分結合全射族を含む」という強い意味でコンパクトであることが要求される。しかし、**CHaus** においてはこの性質が破綻する。

反例 4.1: CHaus における無限空間の非圏論的コンパクト性 (点のふるい)

無限個の点を持つコンパクト Hausdorff 空間 X (例えば閉区間 $[0, 1]$) を考える。各点 $x \in X$ に対して包含写像 $f_x: \{x\} \hookrightarrow X$ を考える。この射の族 $S = \{f_x\}_{x \in X}$ の像の和集合は X 全体となるため、集合論的にも圏論的にも結合的に全射 (jointly surjective) である。しかし、この族からいかなる有限部分族を取り出しても、その像は有限個の点に過ぎず、 X 全体を覆うことは決してない。したがって、**CHaus** の対象は一般の圏論的な意味ではコンパクトではない。

このようにナীবな圏論的コンパクト性が破綻するため、**CHaus** における $J_{can} = J_{coh}$ の証明には、被覆が単なる結合全射ではなく「普遍的有効エピふるい」であることを利用した固有のアプローチが必要となる。

定理 4.2: CHaus において $J_{can} = J_{coh}$ である

証明:

第1段 (背理法の仮定と有向集合の構成):

$S \in J_{can}(X)$ を普遍的有効エピふるいとする。定理2.2により、これは特に $X \cong \text{colim}_{f \in S} \text{dom}(f)$ を意味する。ここで背理法を用いる。 S のいかなる有限部分族 F をとっても、その像の和 $M_F = \bigcup_{f \in F} \text{Im}(f)$ が X を覆わない、すなわち $M_F \neq X$ であると仮定する。

S の有限部分族の全体を Λ とし、包含関係 ($F_1 \leq F_2 \iff F_1 \subset F_2$) によって Λ を有向集合とみなす。各 $F \in \Lambda$ に対し、 $\text{dom}(f)$ はコンパクト空間であり、連続写像 f の像 $\text{Im}(f)$ もコンパクトである。 X は Hausdorff 空間であるため、コンパクト部分集合 $\text{Im}(f)$ は閉集合である。有限個の閉集合の和 M_F も閉集合となる。

背理法の仮定より $M_F \neq X$ であるため、補集合 $X \setminus M_F$ は空でない開集合となる。選択公理により、各 $F \in \Lambda$ に対して点 $x_F \in X \setminus M_F$ を選ぶことができ、有向点族 (ネット) $(x_F)_{F \in \Lambda}$ が構成される。

第2段 (ウルトラフィルターの空間 Y の構成と性質):

添字集合 Λ 上のすべてのウルトラフィルターからなる集合を Y とする。 Y に位相を導入するため、 $U \subset \Lambda$ に対して $\hat{U} = \{\mathcal{V} \in Y \mid U \in \mathcal{V}\}$ を基本開集合系とする。

ウルトラフィルターの性質により $\hat{U} \cap \hat{W} = \widehat{U \cap W}$ が成り立つため、これは正当な基本開集合系である。また、任意の $\mathcal{V} \in Y$ に対して $U \in \mathcal{V}$ または $\Lambda \setminus U \in \mathcal{V}$ のいずれか一方が排他的に成り立つため、 $\hat{U}$ の補集合は $\widehat{\Lambda \setminus U}$ となり、 $\hat{U}$ は開集合かつ閉集合 (クローブン集合) である。

Y は全不連結なコンパクト Hausdorff 空間 (Stone 空間) となる。

Hausdorff性の証明：異なる $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in Y$ に対して、ある $U \in \mathcal{U}$ が存在し $\Lambda \setminus U \in \mathcal{V}$ となる。 $\hat{U}$ と $\widehat{\Lambda \setminus U}$ は交わらない開集合であり、各々を分離する。

コンパクト性の証明： Y の開被覆 $\{\hat{U}_i\}_{i \in I}$ が有限部分被覆を持たないと仮定する。このとき、任意の有限個の $i_1, \dots, i_k$ に対しても $Y \neq \bigcup_k \hat{U}_{i_k} = \widehat{\bigcup_k U_{i_k}}$ となる。これは $\Lambda \setminus \bigcup_k U_{i_k} \neq \emptyset$ を意味し、族 $\{\Lambda \setminus U_i\}$ が有限交叉性を持つことを示す。有限交叉性を持つ族はあるウルトラフィルター $\mathcal{V}^* \in Y$ に含まれるため、すべての i について $U_i \notin \mathcal{V}^*$ となり、 $\mathcal{V}^*$ はどの $\hat{U}_i$ にも含まれず被覆であることに矛盾する。ゆえに Y はコンパクトである。

第3段 (極限の存在・一意性と連続写像 g の構成):

各ウルトラフィルター $\mathcal{V} \in Y$ に対して、ネット (x_F) の極限が存在することを示す。

X における点 x が $\mathcal{V}$ に沿った極限であるとは、任意の開近傍 W に対して $\{F \in \Lambda \mid x_F \in W\} \in \mathcal{V}$ となることである。

X がコンパクトであるため、この極限は必ず存在する。もし存在しないと仮定すると、任意の $x \in X$ に対してある開近傍 W_x が存在し、 $U_x = \{F \in \Lambda \mid x_F \in W_x\} \notin \mathcal{V}$ となる。ウルトラフィルターの性質より $\Lambda \setminus U_x \in \mathcal{V}$ である。 X はコンパクトであるため、有限個の $W_{x_1}, \dots, W_{x_m}$ で X を被覆できる。このとき $\Lambda = \bigcup_{i=1}^m U_{x_i}$ となるが、ウルトラフィルターが和集合を含むならば少なくとも一つの U_{x_i} を含まねばならず、矛盾する。ゆえに極限は存在する。

さらに X はHausdorffであるため、極限は一意に定まる。この一意な極限を $g(\mathcal{V}) = \lim_{\mathcal{V}} x_F$ と定義し、写像 $g: Y \rightarrow X$ を得る。

第4段 (写像 g の連続性の証明):

任意の $\mathcal{V} \in Y$ と、 $g(\mathcal{V})$ の X における任意の開近傍 W をとる。 X はコンパクトHausdorff（したがって正則空間）であるため、 $g(\mathcal{V}) \in W_1 \subset \overline{W_1} \subset W$ となる開近傍 W_1 を選べる。極限の定義より $U = \{F \in \Lambda \mid x_F \in W_1\} \in \mathcal{V}$ である。このとき $\hat{U}$ は Y における $\mathcal{V}$ の開近傍である。

任意の $\mathcal{V}' \in \hat{U}$ について $U \in \mathcal{V}'$ であるから、 $g(\mathcal{V}') = \lim_{\mathcal{V}'} x_F$ は閉集合 $\overline{W_1}$ の中に存在しなければならない。結果として $g(\hat{U}) \subset \overline{W_1} \subset W$ となり、 g の連続性が完全に証明された。

第5段 (普遍的有効エピふるいの引き戻しと矛盾の導出):

$S \in J_{can}(X)$ は普遍的有効エピふるいであるため、定理2.2より、連続写像 $g: Y \rightarrow X$ による引き戻しふるい g^*S は Y における有効エピふるいをなし、 $g^*S \in J_{can}(Y)$ となる。

第2段で示した通り、 Y はStone空間である。本稿の第5部（定理5.4）で証明される通り、Stone空間においては純粋な代数的論証により $J_{can}(Y) = J_{coh}(Y)$ が成立する。

したがって、 $g^*S \in J_{coh}(Y)$ であり、 g^*S には Y 全体を覆う有限部分族 $\{h_1, \dots, h_n\}$ が存在する。

各 h_i は Y への射であり、引き戻しの定義から、対応する $f_i \in S$ が存在して $g \circ h_i = f_i \circ u_i$ となる。 $h_1, \dots, h_n$ が Y を覆うため、これに g を適用すると

$$g(Y) = \bigcup_{i=1}^n g(\text{Im}(h_i)) \subset \bigcup_{i=1}^n \text{Im}(f_i) = M_{F^*}$$

となる。ここで $F^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ は Λ に属する S の有限部分族である。

一方、 Λ の元 F^* に対応する主フィルター $e_{F^*} \in Y$ (F^* を含むすべての部分集合からなるウルトラフィルター) を考える。極限の性質より $g(e_{F^*}) = x_{F^*}$ である。

包含関係 $g(Y) \subset M_{F^*}$ より、 $g(e_{F^*}) = x_{F^*} \in M_{F^*}$ が成り立たなければならない。しかし第1段におけるネットの構成において、点 x_{F^*} は意図的に $x_{F^*} \notin M_{F^*}$ となるように選ばれており、これは決定的な矛盾である。

したがって最初の背理法の仮定は誤りであり、 S は必ず X を覆う有限部分族を含まなければならない。ゆえに $J_{can} = J_{coh}$ が成立する。

証明終

第5部: 圏論的抽象化と一般化 (J-コンパクト性と双対性)

第4部で示した証明は一見すると位相空間論に特化しているように見える。しかし、Topos理論および圏論的双対性の視座からは、この証明は極めて自然な代数的・圏論的構造の現れであることが理解できる。ここではその抽象化のメカニズムを解説する。

定義 5.1: Topos理論における相対的コンパクト性 (J -コンパクト)

一般の圏論において「任意の結合全射」を対象にすると条件が強すぎるという反省から、特定のGrothendieck位相 J に相対化したコンパクト性が定義される。

サイト $(\mathcal{C}, J)$ における対象 X が J に関してコンパクト (J -コンパクト) であるとは、 X 上の任意の被覆ふるい $S \in J(X)$ に対して、ある有限部分族 $F \subset S$ が存在して、その F から生成されるふるい $\langle F \rangle$ もまた $J(X)$ に属することである。

定理 5.2: J -コンパクト性と位相の一致の同値性

有限余極限を持つBarr完全圏 $\mathcal{C}$ において、カノニカル位相とコヒーレント位相が一致すること ($J_{can} = J_{coh}$) は、すべての対象が J_{can} -コンパクトであることと同値である。

証明:

($\implies$): $J_{can} = J_{coh}$ と仮定する。任意の対象 X と $S \in J_{can}(X)$ をとると、 $S \in J_{coh}(X)$ である。コヒーレント位相の定義より、 S は結合的に全射な有限部分族 F を含む。Barr完全圏において結合全射な族は有効エピふるいを生成するため、 $\langle F \rangle \in J_{can}(X)$ となる。ゆえに X は J_{can} -コンパクトである。

($\impliedby$): すべての対象が J_{can} -コンパクトであると仮定する。 $S \in J_{can}(X)$ をとると、定義より有限部分族 $F \subset S$ が存在し $\langle F \rangle \in J_{can}(X)$ となる。定理2.2より $\langle F \rangle$ は普遍的有効エピふるいであるため、特に $X \cong \text{colim}_{f \in \langle F \rangle} \text{dom}(f)$ が成り立つ。有限部分族 F がこの余極限を生成するため、Barr完全圏の性質によりコプロダクト射 $\coprod_{f \in F} \text{dom}(f) \rightarrow X$ は正則エピ射となる。したがって F は結合的に全射であり、 $S \in J_{coh}(X)$ が成り立つ。

証明終

この定理により、問題は「いかにして対象が J_{can} -コンパクトであることを圏論的に証明するか」に帰着される。**CHaus** における証明は、実は「代数と幾何の双対性 (Categorical Duality)」を用いた証明の具体的な実現に他ならない。

概念 5.3: 代数と幾何の双対性による抽象化 (Gelfand / Stone Duality)

Gelfand双対性により、コンパクトHausdorff空間の圏 **CHaus** の双対圏 **CHaus**^{op} は、可換単位的 C^* -代数の圏 **cC*Alg** と圏同値になる。このとき、空間 X は連続関数のなすBanach環 $C(X, \mathbb{C})$ と対応する。

圏論的双対性のもとでは、幾何的な空間の圏 $\mathcal{C}$ における有効エピふるい (余極限図式) は、代数の圏 $\mathcal{A}$ における極限図式 (limit diagram) へと変換される。

第4部の定理4.2の証明において、有向点族とその超極限を用いてコンパクト空間 Y を引き戻しとして構成した操作は、まさに代数側における極限の保存と局所情報の統合（米田の補題の適用）を幾何学的に言い換えた構造そのものである。このように、トポス理論における幾何学的性質は、双対圏における代数的な有限性（有限交叉性やイデアルの極大性）へと純粋に抽象化される。

この双対性のアプローチが一般の圏論でいかに強力に機能するかを示すため、プロ有限空間 (Stone空間) の圏 **Stone** における

$J_{can} = J_{coh}$ の証明を、双対であるBoole代数の圏 **Bool** を用いて純粋に代数的に実行する。

一般化の例 5.4: Stone空間の圏における圏論的・代数的証明

Stone を全不連結なコンパクトHausdorff空間の圏とする。Stone双対性により **Stone**^{op} $\simeq$ **Bool** (Boole代数の圏) である。

証明:

第1段 (極限図式への翻訳):

対象 $X \in \mathbf{Stone}$ 上の任意の普遍的有効エピふるい $S \in J_{can}(X)$ をとる。Stone双対性により、 X はあるBoole代数 B に対応し、圏同値 **Stone**^{op} $\simeq$ **Bool** が成立する。双対性により、ふるい S は **Bool** における B を頂点とする極限図式、すなわち **有効モノコシーブ (effective monomorphic cosieve)** に対応する。Boole代数の圏においてすべてのモノ射は有効であるため、このコシーブは B から様々な商代数 B/I_α (I_α はイデアル) への全射準同型の族 $\{\pi_\alpha : B \rightarrow B/I_\alpha\}$ として表現できる。これが B を極限 (直積への埋め込み) とするということは、代数的に各イデアルの共通部分がゼロであることを意味する。すなわち $\bigcap_\alpha I_\alpha = \{0\}$ である。

第2段 (背理法の仮定と極大イデアルの構成):

ここで背理法を用いる。このコシーブがいかなる有限部分コシーブも有効にしない、すなわち、いかなる有限個のイデアルを取り出してもその共通部分がゼロにならないと仮定する。Boole代数において、任意の有限共通部分が $\{0\}$ にならないようなイデアルの族 $\{I_\alpha\}$ は、「真のイデアル」を生成する。これは、有限交叉性を持つフィルターの双対概念である。Zornの補題により、自明でない真のイデアルは必ずある極大イデアル $\mathfrak{m} \subset B$ に含まれる。したがって、すべての α について $I_\alpha \subset \mathfrak{m}$ となる極大イデアルが存在する。

第3段 (矛盾の導出と幾何学的結論):

$\mathfrak{m}$ は極大イデアルであるから、 $\mathfrak{m} \neq B$ である。したがって、 $\mathfrak{m}$ に属さない元 $e \in B$ ($e \neq 0$) が存在する。しかし、すべての α について $I_\alpha \subset \mathfrak{m}$ であるため、各商代数への射影 π_α の核 I_α はこの e を捉えきれない (各射影でゼロになるのは I_α の元のみ)。これは $\bigcap_\alpha I_\alpha = \{0\}$ という極限の性質に矛盾する。したがって仮定は誤りであり、必ず有限個の $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ が存在して $\bigcap_{k=1}^n I_{\alpha_k} = \{0\}$ となる。これを双対性によって幾何学の言葉に戻すと、**Stone** において有限部分族の射の像が X 全体を覆うこと、すなわち $S \in J_{coh}(X)$ であることを意味する。ゆえに **Stone** において $J_{can} = J_{coh}$ である。

証明終

参考文献

- Johnstone, P. T. (1982). *Stone Spaces*. Cambridge University Press.
- Johnstone, P. T. (2002). *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium, Volumes 1, 2*. Oxford University Press.
- Mac Lane, S., & Moerdijk, I. (1992). *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*. Springer-Verlag.